

3

Frottements et balistique

3.1 Forces de frottement

Comme les frottements sont omniprésents dans les phénomènes physiques, ils ont été considérés jusqu'au XVII^e siècle comme des propriétés fondamentales et non comme des interactions. Aristote considérait que le mouvement d'un objet soumis au frottement de l'air était son mouvement naturel. Galilée a réalisé que le mouvement naturel d'un corps est un mouvement rectiligne uniforme en absence de force de frottement. Cela a remis en cause le paradigme aristotélicien qui a été remplacé par le paradigme newtonien.

Les **frottements**, aussi appelé **friction**, sont dus à une interaction entre deux systèmes qui s'oppose à leur mouvement relatif. Les frottements sont caractérisés par des forces phénoménologiques, c'est-à-dire qu'elles sont tirées de l'expérience. La branche de la mécanique qui étudie les frottements est la **tribologie**. Les frottements sont le résultat de différents types d'interactions qui ont lieu principalement à l'échelle microscopique. Il existe des frottements de deux types différents : des **frottements secs** qui ont lieu à l'interface entre des solides ou des **frottements visqueux** d'un solide immergé dans un fluide – c'est-à-dire un liquide ou un gaz.

3.1.1 Frottements secs

A la fin du XVIII^e siècle, Charles Augustin de Coulomb a étudié l'action d'une surface sur un solide. Il a montré qu'il fallait distinguer deux types de frottements secs. Les frottements qui empêchent le glissement de la surface de contact d'un solide par rapport à un autre ont été appelés **frottements statiques**. Les frottements qui s'opposent au glissement de la surface de contact d'un solide par rapport à un autre et ralentissent ce mouvement ont été appelés **frottements cinétiques**. Au début du XVI^e siècle, Léonard de Vinci étudie



Charles Augustin de Coulomb

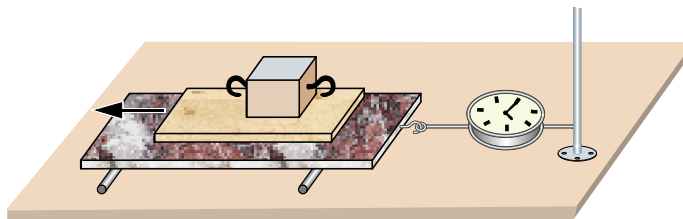


FIGURE 3.1 Une plaque de bois glisse sur une surface lisse et sèche. Des poids sont posés sur la plaque de bois. On mesure la force appliquée sans glissement, puis la force appliquée lors du glissement.

les frottements secs et en conclut que la force de frottement est proportionnelle à la force exercée par la surface du dessous sur la surface du dessus et qu'elle est indépendante de l'aire de la surface de contact. Deux siècles plus tard, Guillaume Amontons montre qu'elle est indépendante de la norme de la vitesse de mouvement relatif d'un solide par rapport à l'autre.



Léonard de Vinci

Frottements statiques

On considère un solide immobile posé sur une surface (Fig. 3.1). Il subit une force de réaction normale \mathbf{N} qui compense son poids \mathbf{P} . On exerce une force de traction \mathbf{T} tangente à la surface sans que le solide glisse. Le solide subit alors une force de frottement statique \mathbf{F}_f pour compenser la force de traction \mathbf{T} . Elle s'ajuste pour qu'il n'y ait pas de glissement (Fig. 3.2). Lorsque la force de frottement statique \mathbf{F}_f atteint une valeur maximale, il y a

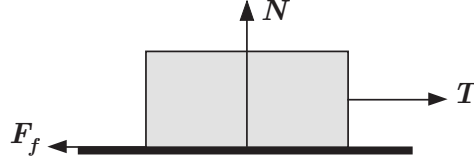


FIGURE 3.2 La force de frottement statique \mathbf{F}_f s'ajuste pour compenser la force de traction \mathbf{T} .

décrochement et glissement. L'expression de la norme $\|\mathbf{F}_f\|$ de la force de frottement statique est donnée par une inéquation établie par de Coulomb,

$$\|\mathbf{F}_f\| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\| \quad (3.1)$$

où $\|\mathbf{N}\|$ est la norme de la réaction normale \mathbf{N} exercée par la surface sur le solide et μ_s est un nombre positif sans dimension physique appelé le **coefficient de frottement statique**. La valeur de ce coefficient dépend notamment des matériaux en contact, de leur état de surface et de l'humidité.

Frottements cinétiques

Lorsque le solide se met en mouvement il subit alors une force de frottement cinétique \mathbf{F}_f qui s'oppose à la force de traction \mathbf{T} (Fig. 3.3). L'expression de la norme $\|\mathbf{F}_f\|$ de la force

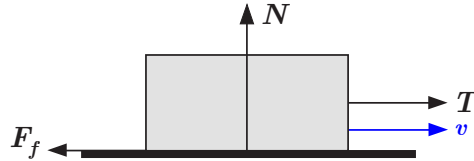


FIGURE 3.3 La force de frottement cinétique \mathbf{F}_f s'oppose au mouvement dû à la force de traction \mathbf{T} .

de frottement cinétique est donnée par une équation établie par de Coulomb,

$$\mathbf{F}_f = -\mu_c \|\mathbf{N}\| \hat{\mathbf{v}} \quad (3.2)$$

où $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ est le vecteur unitaire sans dimension physique qui est colinéaire au vecteur vitesse et μ_c est un nombre positif sans dimension physique appelé le **coefficient de frottement cinétique**. Dans ce modèle, on considère que le coefficient μ_c est indépendant de la vitesse.

On constate expérimentalement que le coefficient de frottement cinétique entre deux solides est plus petit que le coefficient de frottement statique, c'est-à-dire $\mu_c < \mu_s$ (Tab. 3.1). On en fait l'expérience lorsqu'on fait glisser un meuble lourd sur un sol lisse. Avant le décrochement, en régime statique, la norme de la force de frottement $\|\mathbf{F}_f\|$ est une fonction linéaire croissante de la norme de la force de traction $\|\mathbf{T}\|$. Lorsqu'elle atteint la valeur maximale $\mu_s \|\mathbf{N}\|$, il y a décrochement. Puis la norme de la force de frottement $\|\mathbf{F}_f\|$ chute brutalement en régime cinétique pour atteindre la valeur constante $\mu_c \|\mathbf{N}\|$ qui est indépendante de la norme de la force de traction $\|\mathbf{T}\|$ (Fig. 3.4).

3.1.2 Frottements visqueux

Une force de frottement visqueux s'exerce sur un objet qui se déplace dans un fluide. Elle dépend de la vitesse relative \mathbf{v} de l'objet par rapport au fluide. Il convient de distinguer

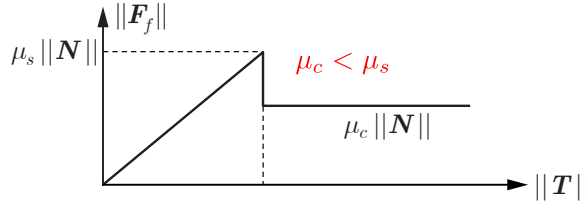


FIGURE 3.4 Comportement de la norme de la force de frottement $\|\mathbf{F}_f\|$ en fonction de la norme de la force de traction $\|\mathbf{T}\|$ en régime statique puis cinétique.

TABLE 3.1 Coefficients de frottement sec

Matériaux	Statique μ_s	Cinétique μ_c
Caoutchouc/Asphalte	1.0	0.8
Acier/Acier	0.74	0.57
Aluminium/Acier	0.61	0.47
Cuivre/Acier	0.53	0.36
Glace/Glace	0.1	0.03
Téflon/Téflon	0.04	0.03
Articulation humaine	0.01	0.003

deux types de régimes. Le premier est le régime d'**écoulement laminaire** qui correspond à une vitesse relative suffisamment basse. Le second est le régime d'**écoulement turbulent** qui correspond à une vitesse relative suffisamment élevée, mais inférieure à la vitesse du son.

Loi de Stokes

En régime d'écoulement laminaire, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse relative \mathbf{v} et satisfait la **loi de Stokes**,

$$\mathbf{F}_f = -k\eta\mathbf{v} = -b\mathbf{v} \quad (3.3)$$

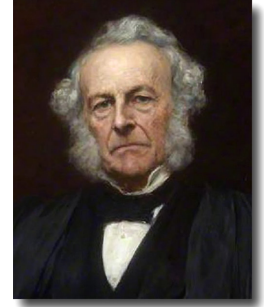
où k est un facteur géométrique et η est la viscosité du fluide. Dans le cas d'une sphère, le facteur géométrique $k = 6\pi R$ où R est le rayon de la sphère. La viscosité η qui dépend notamment de la température représente une résistance à l'écoulement (Tab. 3.2). L'unité de la viscosité dans le système international d'unités est noté $[\text{N s m}^{-2}]$.

Traînée

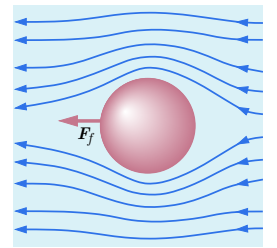
En régime d'écoulement turbulent, la force de frottement est la traînée qui est proportionnelle au carré de la norme de la vitesse relative v^2 ,

$$\mathbf{F}_f = -\frac{1}{2} C_x A \rho v^2 \hat{\mathbf{v}} \quad (3.4)$$

où C_x est le coefficient de traînée qui n'a pas de dimension physique, A est l'aire de la projection de l'objet sur le plan orthogonal au vecteur vitesse et ρ est la densité du fluide



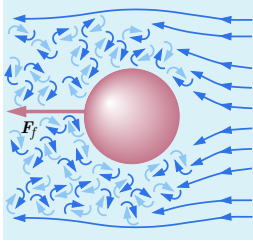
George Gabriel Stokes



Écoulement laminaire

TABLE 3.2 Viscosité à 25° C

Substances	Viscosité η $[\text{N s m}^{-2}]$
Air	0.00002
Eau	0.0009
Sang	0.004
Huile	0.2
Miel	10
Ketchup	100
Verre	1000



Ecoulement turbulent

– c'est-à-dire le rapport de sa masse et de son volume. Le coefficient de traînée est un coefficient qui est entièrement déterminé par la géométrie de l'objet (Fig. 3.5).

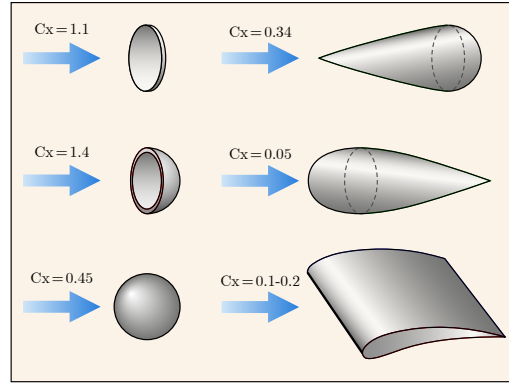
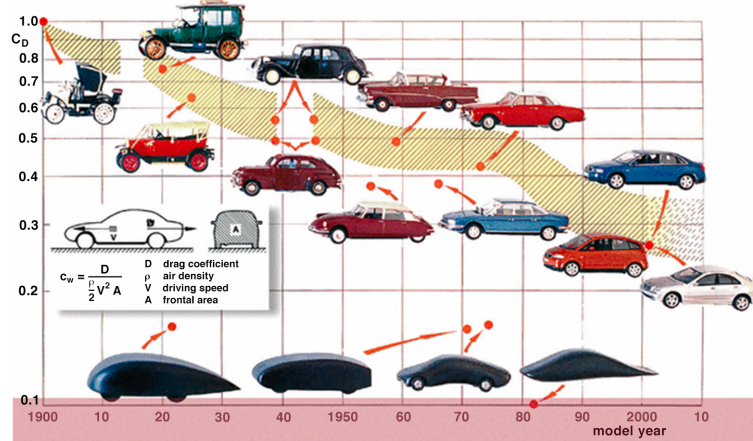


FIGURE 3.5 Le coefficient de traînée est déterminé par la forme géométrique de l'objet.

L'histoire de l'automobile illustre l'évolution du coefficient de traînée C_x . Au début du XX^e siècle, les voitures avaient un coefficient de traînée $C_x = 0.7 - 1.0$. Aujourd'hui, les voitures les plus aérodynamiques ont un coefficient de traînée $C_x = 0.2 - 0.3$ (Fig. 3.6). Le coefficient de traînée a donc pu être réduit d'un facteur trois en un siècle grâce au progrès de l'aérodynamique – la branche de la mécanique qui étudie l'écoulement de l'air.

FIGURE 3.6 Evolution du coefficient de traînée C_x des voitures du XX^e au XXI^e siècle.

3.2 Balistique sans frottement

Après avoir posé les bases de la mécanique newtonienne et introduit différents modèles pour les frottements, on va à présent examiner une application pratique de ces lois : la balistique. La balistique est l'étude des trajectoires d'objets, qui peuvent être assimilés à des points matériels, lorsqu'ils sont soumis à l'attraction terrestre à la surface de la terre. La balistique cherche donc à déterminer l'équation horaire d'un point matériel soumis à la force de pesanteur due à son propre poids. Lorsqu'on parle de balistique, on pense tout de suite au lancer d'une balle ou à la trajectoire d'un obus.

Si une craie est lancée avec une vitesse initiale quelconque dans un plan vertical, sa trajectoire est parabolique alors que si elle est lancée verticalement sa trajectoire est rectiligne. Pour comprendre ceci, on doit établir les équations horaires de la balistique. Dans un premier temps, on considère les cas simples où le frottement peut être négligé.

3.2.1 Démarche de résolution

Lorsqu'on désire résoudre un problème de dynamique, il est utile d'utiliser une démarche systématique. En utilisant une telle approche, on structure l'esprit et on adopte une méthodologie connue en terrain inconnu. Cette approche systématique est donc en quelque sorte une approche *tout-terrain*. Cette approche n'est pas toujours nécessairement la meilleure, mais elle est très certainement la plus polyvalente. Dans le cas particulier de la balistique sans frottement, la marche à suivre est la suivante :

- On choisit un référentiel et un repère adapté — ou un système de coordonnées. Dans le cas du mouvement balistique, il n'a pas de symétrie particulière. On choisit donc un repère cartésien.
- On identifie les forces extérieures agissant sur le point matériel. Dans le cas d'un mouvement balistique sans frottement, la seule force agissant sur le point matériel est la force de pesanteur due à l'attraction gravitationnelle.
- On définit les conditions initiales sur la position et la vitesse du mouvement balistique spécifique qu'on désire décrire.
- On énonce la loi vectorielle du mouvement — c'est-à-dire la 2^e loi de Newton — dans le cas du mouvement balistique.
- On projette la loi vectorielle du mouvement sur les axes de coordonnées. On obtient trois équations du mouvement. Ces équations sont des équations différentielles exprimées en termes des dérivées des composantes de la position par rapport au temps.
- Pour obtenir les équations horaires du point matériel, on intègre les équations du mouvement par rapport au temps. En combinant les équations horaires, on obtient l'équation de la trajectoire de l'objet.

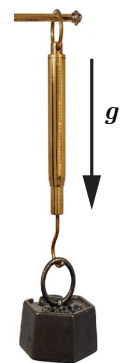
3.2.2 Poids

Pour faire de la balistique, il faut commencer par définir la force de pesanteur exercée sur un objet à la surface de la terre par l'attraction gravitationnelle. La force de pesanteur d'un objet, c'est simplement son poids. Un objet en chute libre subit une accélération dirigée vers le bas qui due à la force de pesanteur. Il existe donc un **champ vectoriel de gravitation** qu'on dénote \mathbf{g} . On utilise le terme champ, parce que la force de pesanteur agit partout, c'est-à-dire en tout point. Ce champ varie lorsqu'on s'éloigne ou se rapproche du centre de la terre. Il varie aussi avec la latitude à cause des effets liés à la rotation de la terre et à cause du fait que la terre n'est pas une sphère parfaite, mais a une forme d'ellipsoïde. Seulement, à l'échelle de distances qu'on considère lorsqu'on lance une balle ou qu'on tire un obus, ces effets sont négligeables et on peut considérer que le champ de pesanteur est à peu près constant et dirigé vers le centre de la terre.

La **force de pesanteur** ou le **poids** d'un objet est défini comme le produit de la masse m de l'objet et du champ gravitationnel \mathbf{g} en accord avec la 2^e loi de Newton (2.32),

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} \quad (3.5)$$

Le poids \mathbf{P} est considéré comme une force extérieure \mathbf{F}^{ext} puisque la cause de cette force est le champ de pesanteur qui est extérieur à l'objet. Pour trouver des solutions quantitatives aux problèmes de balistique, il faut pouvoir disposer d'une valeur numérique de ce champ de pesanteur. La valeur expérimentale de la norme du champ gravitationnel \mathbf{g} évaluée à une latitude de 45° à l'altitude $h = 0$ m du niveau de la mer est $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.



Poids

3.2.3 Loi du mouvement balistique

Après avoir établi l'expression (2.32) de la 2^e loi de Newton et obtenu l'expression (3.5) de la force de pesanteur, on est à présent en mesure d'établir la loi dynamique du mouvement balistique. La seule force extérieure \mathbf{F}^{ext} est le poids de l'objet \mathbf{P} . Par conséquent, la loi du

mouvement balistique (2.32) s'écrit,

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} = m \mathbf{a} \quad (3.6)$$

En substituant l'expression (3.5) du poids dans l'équation du mouvement et en la divisant par la masse m de l'objet, on obtient,

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad (3.7)$$

Ainsi, l'accélération de l'objet est constante et indépendante de sa masse m . Si on laisse tomber en chute libre une goutte d'eau et une bille d'acier de même volume, leur accélération est la même. Evidemment ces deux objets ont une masse différente, mais leur accélération est la même. On observe cela en absence de frottement ou si les frottements sont négligeables. Galilée a prédit et Torricelli a observé que dans le vide une plume et un cube de plomb ont la même accélération (Fig. 3.7).



Accélération constante



Evangelista Torricelli



Plume et plomb



FIGURE 3.7 Dans le vide, en absence de frottement, la plume et le cube de plomb ont la même accélération.

3.2.4 Repère et conditions initiales

Etant donné que le mouvement balistique en absence de frottement n'a pas de symétrie particulière, on choisit comme repère, le repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. La loi du mouvement balistique (3.7) décrit toutes sortes de mouvements possibles. Pour déterminer un mouvement balistique spécifique, on doit spécifier les coordonnées cartésiennes de la position et de la vitesse à un instant donné. Pour simplifier, on donne, en général, la position et la vitesse à l'instant initial $t = 0$. Pour cette raison, on parle de conditions initiales.

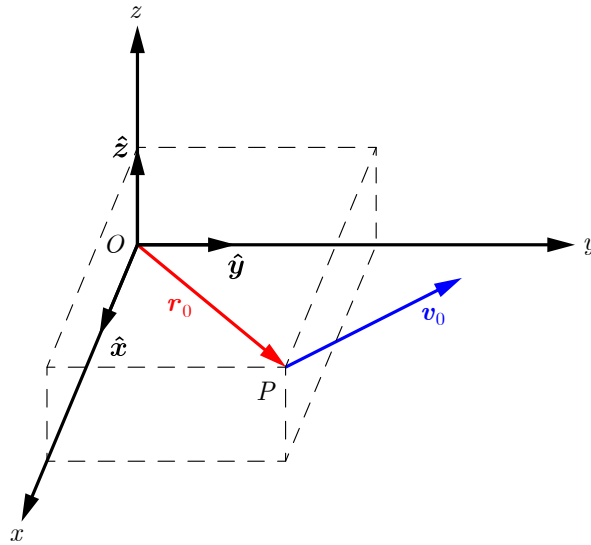


FIGURE 3.8 Le point matériel P a une position initiale \mathbf{r}_0 et une vitesse initiale \mathbf{v}_0 quelconques.

Le vecteur position initiale $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ s'écrit en composantes cartésiennes comme $x(0)\hat{x} + y(0)\hat{y} + z(0)\hat{z} = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$. Par conséquent, il y a trois conditions initiales sur la

position (Fig. 3.8),

$$(i) \quad x(0) = x_0 \quad (ii) \quad y(0) = y_0 \quad (iii) \quad z(0) = z_0 \quad (3.8)$$

Le vecteur vitesse initiale $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ s'écrit en composantes cartésiennes comme $\dot{x}(0)\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}(0)\hat{\mathbf{y}} + \dot{z}(0)\hat{\mathbf{z}} = v_{0x}\hat{\mathbf{x}} + v_{0y}\hat{\mathbf{y}} + v_{0z}\hat{\mathbf{z}}$. Par conséquent, il y a trois conditions initiales sur la vitesse (Fig. 3.8),

$$(i) \quad \dot{x}(0) = v_{0x} \quad (ii) \quad \dot{y}(0) = v_{0y} \quad (iii) \quad \dot{z}(0) = v_{0z} \quad (3.9)$$

3.2.5 Equations du mouvement balistique

Le vecteur accélération s'écrit en coordonnées cartésiennes comme $\mathbf{a} = \ddot{x}\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}}$. Le champ de gravitation \mathbf{g} est dirigé vers le bas et s'écrit donc en coordonnées cartésiennes comme $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ où $g > 0$. En projetant la loi vectorielle du mouvement (3.7) selon les axes de coordonnées du repère cartésien, on obtient trois équations scalaires du mouvement,

$$\begin{aligned} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad & \ddot{x} = 0 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : \quad & \ddot{y} = 0 \\ \text{selon } \hat{\mathbf{z}} : \quad & \ddot{z} = -g = \text{cste} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En intégrant les équations du mouvement (3.10) par rapport au temps, compte tenu des conditions initiales (3.9) sur la vitesse, on obtient les équations de la vitesse,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{0x} = \text{cste} \\ \dot{y} &= v_{0y} = \text{cste} \\ \dot{z}(t) &= -gt + v_{0z} \end{aligned} \quad (3.11)$$

En intégrant les équations de la vitesse (3.11) par rapport au temps, compte tenu des conditions initiales (3.8) sur la position, on obtient les équations horaires,

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t + x_0 \\ y(t) &= v_{0y}t + y_0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le mouvement selon les axes de coordonnées Ox et Oy est rectiligne uniforme car il n'y a pas de force qui agit dans ces directions. Le mouvement selon l'axe de coordonnée Oz est rectiligne uniformément accéléré vers le bas dû au champ gravitationnel.

3.2.6 Chute libre

On considère le mouvement de **chute libre** d'un point matériel le long de l'axe Oz d'une position initiale $\mathbf{r}_0 = h\hat{\mathbf{z}}$ où h est la hauteur initiale avec une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. Au temps de chute $t = t_c$ lorsque le point matériel touche le sol, c'est-à-dire $z(t_c) = 0$, la troisième équation du mouvement balistique (3.12) devient,

$$-\frac{1}{2}gt_c^2 + h = 0 \quad (3.13)$$

Ainsi, le temps de chute libre est de la forme suivante,

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.14)$$

Alternativement, en connaissant la hauteur de chute h et en mesurant le temps de chute t_c on peut déterminer expérimentalement le champ gravitationnel g .



Mesure de g

3.2.7 Trajectoire balistique

On considère le mouvement balistique d'un point matériel initialement à l'origine, c'est-à-dire $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, avec une vitesse initiale contenue dans le plan vertical Oxz et orientée selon un angle de tir α par rapport à l'axe horizontal Ox , c'est-à-dire $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + v_0 \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}$. Ainsi, les équations du mouvement balistique (3.12) deviennent (Fig. 3.9),

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{aligned} \quad (3.15)$$

En substituant la première équation du mouvement (3.15) dans la troisième équation du

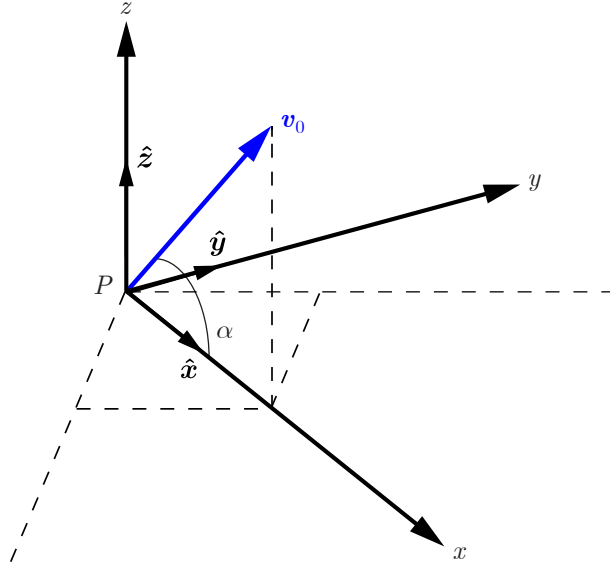


FIGURE 3.9 Le point matériel P est initialement à l'origine avec une vitesse initiale \mathbf{v}_0 dans le plan Oxz qui est orientée selon un angle de tir α par rapport à l'axe horizontal Ox .

mouvement, on élimine explicitement le paramètre temps t et on obtient l'équation de la **trajectoire balistique** (Fig. 3.10),

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x \quad (3.16)$$

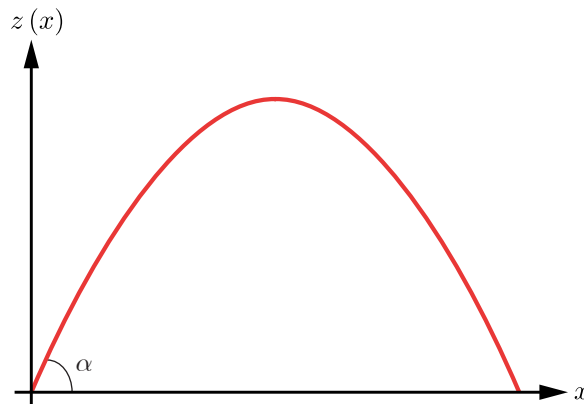


FIGURE 3.10 La trajectoire du mouvement balistique d'un point matériel en absence de frottement est une parabole.

A titre d'exemple, on considère un mécanisme qui permet de lâcher deux boules simultanément. La première boule n'a pas de vitesse initiale, elle est donc en chute libre. La

deuxième a une vitesse initiale horizontale due à l'action d'un ressort et suit donc un mouvement rectiligne uniforme selon l'axe horizontal et un mouvement rectiligne uniformément accéléré selon l'axe vertical (Fig. 3.11). Les deux boules frappent le sol en même temps, car elles sont soumises à la même accélération verticale du champ de pesanteur.

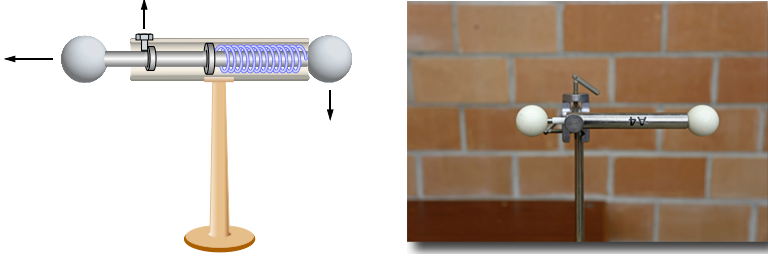


FIGURE 3.11 La boule de gauche est en chute libre alors que la boule de droite est éjectée par un ressort horizontal.

Comme autre exemple, on considère une table à air inclinée de sorte que le bord long soit horizontal et que le bord court soit incliné. Un puck est lâché depuis le coin droit du haut de la table. Simultanément, un puck est lancé depuis le coin gauche du bas de la table dans la ligne de visée du premier avec une vitesse bien choisie. Les deux pucks entrent en collision au coin droit du bas de la table (Fig. 3.12).

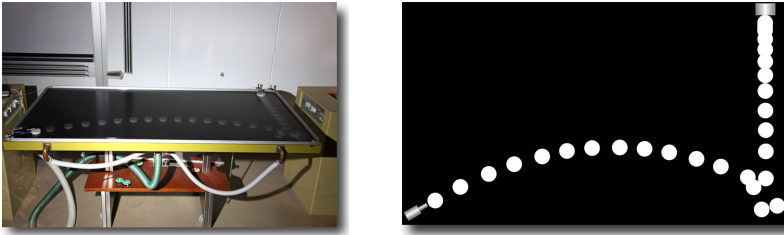


FIGURE 3.12 Le puck de bas est lancé sur une table à air inclinée avec une vitesse initiale orientée vers le puck du haut lâché simultanément sans vitesse initiale.

3.3 Balistique avec frottement

Les frottements subit par un objet en mouvement dans l'air ou dans d'un autre fluide sont des frottements visqueux. Dans cette section, on considère que la vitesse relative entre l'objet et le fluide est suffisamment basse. Par conséquent, le mouvement de l'objet a lieu en régime d'écoulement laminaire. De manière analogue au cas de la balistique sans frottement, on considère que l'objet peut être modélisé comme un point matériel. En présence de frottement, on suit une démarche analogue à l'analyse balistique sans frottement. Sur le plan mathématique, l'intégration des équations du mouvement pour obtenir les équations de la vitesse puis les équations horaires est un peu plus compliquée. On verra que les équations de la vitesse et les équations horaires sont caractérisées par un temps d'amortissement qui est dû à la présence d'une force de frottement visqueux.

3.3.1 Loi du mouvement balistique

Pour un mouvement balistique en présence de frottement en régime d'écoulement laminaire, les forces extérieures \mathbf{F}^{ext} sont le poids de l'objet \mathbf{P} et la force de frottement visqueux \mathbf{F}_f donnée par la loi de Stokes. Par conséquent, la loi du mouvement balistique (2.32) s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_f = m \mathbf{a} \quad (3.17)$$

En substituant l'expression (3.5) du poids \mathbf{P} et la loi de Stokes (3.3) dans la loi du mouvement (3.17), celle-ci devient,

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v} \quad (3.18)$$

Contrairement à la loi du mouvement balistique sans frottement (3.7), la loi du mouvement balistique avec frottement (3.18) montre que l'accélération dépend de la masse m comme dans le cas de la chute d'une plume et d'une masse de plomb en présence de frottement.

3.3.2 Repère et conditions initiales

Comme dans le cas de la balistique sans frottement, on choisit comme repère, le repère cartésien $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Initialement, le point matériel se trouve à l'origine O , c'est-à-dire $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$. Sa vitesse initiale se trouve dans le plan vertical Oxz , c'est-à-dire $\mathbf{v}(0) = v_{0x}\hat{\mathbf{x}} + v_{0z}\hat{\mathbf{z}}$. Par conséquent, il y a trois conditions initiales sur la position (Fig. 3.9),

$$(i) \quad x(0) = 0 \quad (ii) \quad y(0) = 0 \quad (iii) \quad z(0) = 0 \quad (3.19)$$

Il y a également trois conditions initiales sur la vitesse (Fig. 3.9),

$$(i) \quad \dot{x}(0) = v_{0x} \quad (ii) \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (iii) \quad \dot{z}(0) = v_{0z} \quad (3.20)$$

3.3.3 Equations du mouvement balistique

Le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées cartésiennes $\mathbf{v} = \dot{x}\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}\hat{\mathbf{y}} + \dot{z}\hat{\mathbf{z}} = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}$ et le vecteur accélération s'écrit $\mathbf{a} = \ddot{x}\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{y}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{z}} = \dot{v}_x\hat{\mathbf{x}} + \dot{v}_y\hat{\mathbf{y}} + \dot{v}_z\hat{\mathbf{z}}$. Le champ de gravitation \mathbf{g} est dirigé vers le bas et s'écrit donc en coordonnées cartésiennes $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ où $g > 0$. En projetant la loi vectorielle du mouvement (3.18) selon les axes de coordonnées du repère cartésien, on obtient trois équations scalaires du mouvement,

$$\begin{array}{lll} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : & m\ddot{x} = -b\dot{x} & \text{ou} \quad m\dot{v}_x = -bv_x \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : & m\ddot{y} = -b\dot{y} & \text{ou} \quad m\dot{v}_y = -bv_y \\ \text{selon } \hat{\mathbf{z}} : & m\ddot{z} = -b\dot{z} - mg & \text{ou} \quad m\dot{v}_z = -bv_z - mg \end{array} \quad (3.21)$$

Le **temps d'amortissement** τ est défini comme,

$$\tau = \frac{m}{b} \quad (3.22)$$

Cette définition est cohérente, car en absence de frottement, c'est-à-dire $b = 0$, le temps d'amortissement devient infini, c'est-à-dire $\tau \rightarrow \infty$. Les équations du mouvement balistique avec frottement (3.21) peuvent être divisées par la masse m et mises sous la forme,

$$\begin{array}{lll} \text{selon } \hat{\mathbf{x}} : & \dot{v}_x = -\frac{1}{\tau} v_x & \\ \text{selon } \hat{\mathbf{y}} : & \dot{v}_y = -\frac{1}{\tau} v_y & \\ \text{selon } \hat{\mathbf{z}} : & \dot{v}_z = -\frac{1}{\tau} v_z - g & \end{array} \quad (3.23)$$

Comme le vecteur vitesse initiale \mathbf{v}_0 est contenu dans le plan vertical Oxz , il n'a pas de mouvement balistique selon l'axe horizontal Oy . Le mouvement balistique se décompose en un mouvement horizontal selon l'axe Ox et un mouvement vertical selon l'axe Oz . A présent, on va déterminer l'équation de la vitesse puis l'équation horaire du mouvement horizontal d'abord et du mouvement vertical ensuite.

3.3.4 Mouvement balistique horizontal

La première équation du mouvement balistique avec frottement (3.23) peut être mise sous la forme,

$$\frac{dv_x(t)}{v_x(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad (3.24)$$

Afin d'obtenir l'équation de la vitesse selon l'axe horizontal Ox , on intègre l'équation différentielle du mouvement (3.24) du temps initial 0 au temps t et donc de la vitesse initiale v_{0x} à la vitesse $v_x(t)$,

$$\int_{v_{0x}}^{v_x(t)} \frac{dv'_x(t')}{v'_x(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \quad (3.25)$$

où les variables et fonctions apparaissant dans l'expression de l'intégrant sont notées avec des primes pour ne pas les confondre avec les bornes d'intégration. La solution de l'équation intégrale (3.25) s'écrit,

$$\ln(v_x(t)) - \ln(v_{0x}) = \ln\left(\frac{v_x(t)}{v_{0x}}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (3.26)$$

En prenant l'exponentielle de l'équation (3.26), on obtient l'équation de la vitesse (Fig. 3.13),

$$v_x(t) = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.27)$$

Le temps d'amortissement τ est une mesure quantitative de la décroissance de la vitesse

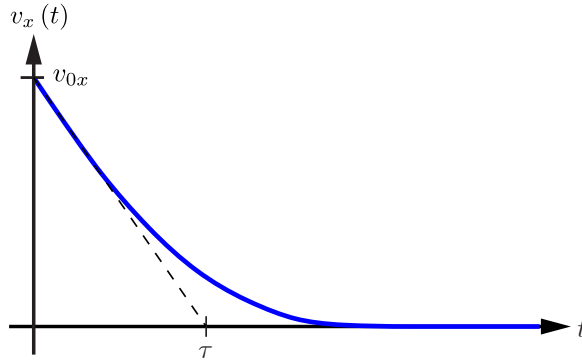


FIGURE 3.13 La vitesse $v(t)$ du mouvement horizontal décroît exponentiellement dû à la force de frottement à partir d'une valeur initiale v_{0x} .

horizontale qui est de 63% (Fig. 3.13),

$$\frac{v_x(\tau)}{v_{0x}} = \exp(-1) = 0.37 = 37\% \quad (3.28)$$

Comme la vitesse est la dérivée (1.2) de la position, le déplacement infinitésimal horizontal $dx(t)$ est donné par,

$$dx(t) = v_{0x} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt \quad (3.29)$$

Afin d'obtenir l'équation horaire selon l'axe horizontal Ox , on intègre l'équation différentielle du déplacement (3.24) du temps initial 0 au temps t et donc de la position initiale 0 à la position $x(t)$,

$$\int_0^{x(t)} dx'(t') = v_{0x} \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) dt' \quad (3.30)$$

La solution de l'équation intégrale (3.30) s'écrit,

$$x(t) = -v_{0x} \tau \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \Big|_{t'=0}^{t'=t} \quad (3.31)$$

L'équation horaire du mouvement horizontal (3.31) peut être mise sous la forme (Fig. 3.14),

$$x(t) = v_{0x} \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (3.32)$$

Pour des temps suffisamment petits par rapport au temps d'amortissement τ , c'est-à-dire

$t \ll \tau$, on peut faire un développement limité au 1^{er} ordre en t/τ de l'exponentielle autour de 0,

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 1 - \frac{t}{\tau} \quad \text{si} \quad t \ll \tau \quad (3.33)$$

Ainsi, compte tenu de ce développement limité (3.33), l'équation horaire tend initialement vers l'asymptote oblique,

$$x(t) = v_{0x} t \quad \text{si} \quad t \ll \tau \quad (3.34)$$

Pour des temps suffisamment grands par rapport au temps d'amortissement τ , c'est-à-dire $t \gg \tau$, l'exponentielle est négligeable. Ainsi, la coordonnée horizontale de la position tend vers une valeur maximale,

$$x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = v_{0x} \tau > 0 \quad (3.35)$$

ce qui signifie que l'équation horaire du mouvement horizontal tend finalement vers l'asymptote horizontale,

$$x(t) = v_{0x} \tau = x_\infty \quad \text{si} \quad t \gg \tau \quad (3.36)$$

L'équation horaire du mouvement horizontal (3.37) peut alors être écrite en termes de la

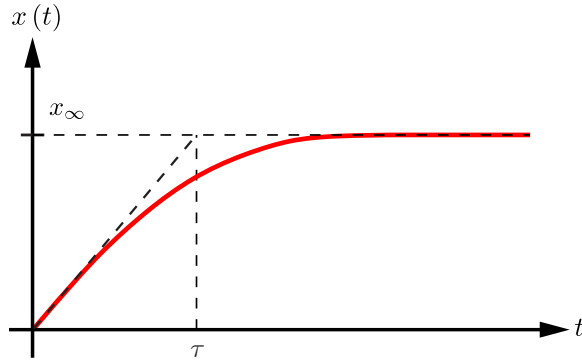


FIGURE 3.14 La coordonnée horizontale de la position $x(t)$ tend vers une valeur maximale x_∞ .

valeur maximale (3.35) comme,

$$x(t) = x_\infty \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (3.37)$$

3.3.5 Mouvement balistique vertical

Afin de résoudre l'équation du mouvement balistique vertical avec frottement (3.23), il faut faire un **changement de variable** pour rendre cette **équation différentielle homogène**, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction doit être proportionnelle à la fonction. Pour ce faire, cette équation est mise sous la forme suivante,

$$\dot{v}_z = \frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\tau} v_z = -\frac{1}{\tau} (v_z + g\tau) \quad (3.38)$$

Par conséquent, on identifie le changement de variable qui rend cette équation homogène,

$$u_z(t) = v_z(t) + g\tau \quad \text{ainsi} \quad \dot{u}_z = \dot{v}_z \quad (3.39)$$

Ainsi, l'équation du mouvement balistique vertical avec frottement (3.23) s'écrit,

$$\dot{u}_z = -\frac{1}{\tau} u_z \quad \text{ainsi} \quad \frac{du_z(t)}{u_z(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad (3.40)$$

Afin d'obtenir l'équation de la vitesse selon l'axe vertical Oz , on intègre l'équation différentielle du mouvement (3.40) du temps initial 0 au temps t et donc de la vitesse initiale

$u_z(0) = v_{0z} + g\tau$ à la vitesse $u_z(t) = v_z(t) + g\tau$,

$$\int_{u_z(0)}^{u_z(t)} \frac{du'_z(t')}{u'_z(t')} = \int_{v_{0z}+g\tau}^{v_z(t)+g\tau} \frac{du'_z(t')}{u'_z(t')} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt' \quad (3.41)$$

La solution de l'équation intégrale (3.41) s'écrit,

$$\ln(v_z(t) + g\tau) - \ln(v_{0z} + g\tau) = \ln\left(\frac{v_z(t) + g\tau}{v_{0z} + g\tau}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (3.42)$$

En prenant l'exponentielle de l'équation (3.42), on obtient l'équation de la vitesse (Fig. 3.15),

$$v_z(t) = (v_{0z} + g\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\tau \quad (3.43)$$

L'équation de la vitesse du mouvement vertical montre que la coordonnée verticale de la vitesse tend vers une valeur minimale appelée **vitesse limite**,

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = -g\tau < 0 \quad (3.44)$$

L'équation de la vitesse (3.43) peut alors être écrite en termes de la vitesse limite (3.44) comme,

$$v_z(t) = (v_{0z} - v_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_\infty \quad (3.45)$$

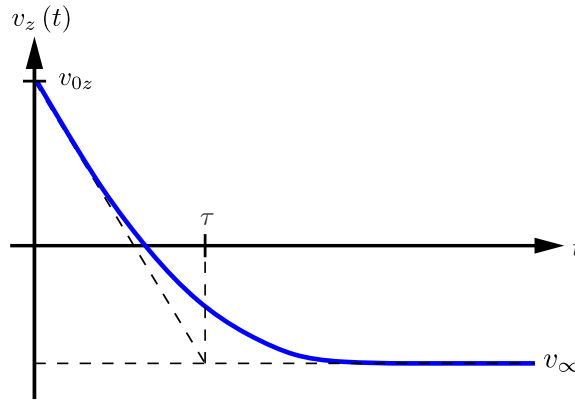


FIGURE 3.15 La vitesse $v(t)$ du mouvement vertical décroît exponentiellement dû à la force de frottement à partir d'une valeur initiale v_{0z} pour tendre vers la vitesse limite v_∞ .

Compte tenu de l'expression (3.22) du temps d'amortissement et du coefficient obtenu par la loi de Stokes (3.3), le temps d'amortissement τ est inversement proportionnel à la viscosité du fluide η ,

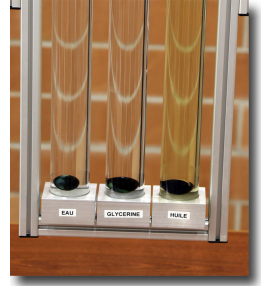
$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{m}{k\eta} = \text{cste} \quad (3.46)$$

Par conséquent, plus le liquide est visqueux plus le temps d'amortissement est court. Une bille en chute libre dans de l'huile est plus rapidement amortie que dans de l'eau. Compte tenu du temps d'amortissement (3.46), la vitesse limite (3.44) est inversement proportionnelle à la viscosité du fluide η ,

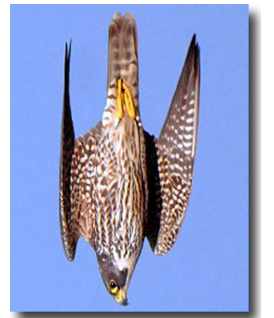
$$v_\infty = -g\tau = -\frac{mg}{k\eta} \quad (3.47)$$

Par conséquent, plus le liquide est visqueux plus la norme de la vitesse limite est faible. La norme de la vitesse limite d'une bille en chute libre dans de l'huile est plus faible que dans de l'eau.

La norme de la vitesse limite de chute libre de l'homme dans l'atmosphère est d'environ 200 km h^{-1} alors que le faucon pèlerin atteint une vitesse limite dont la norme est 300 km h^{-1} . A cette vitesse, l'écoulement de l'air a lieu en régime turbulent et le coefficient de traînée C_x du faucon est bien meilleur que celui de l'homme.



Vitesse limite
(eau, glycérine, huile)



Faucon pèlerin

Comme la vitesse est la dérivée (1.2) de la position, le déplacement infinitésimal vertical $dz(t)$ est donné par,

$$dz(t) = (v_{0z} - v_{\infty}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt + v_{\infty} dt \quad (3.48)$$

Afin d'obtenir l'équation horaire selon l'axe vertical Oz , on intègre l'équation différentielle du déplacement (3.48) du temps initial 0 au temps t et donc de la position initiale 0 à la position $z(t)$,

$$\int_0^{z(t)} dz'(t') = (v_{0z} - v_{\infty}) \int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) dt' + v_{\infty} \int_0^t dt' \quad (3.49)$$

La solution de l'équation intégrale (3.49) s'écrit,

$$z(t) = - (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \Big|_{t'=0}^{t'=t} + v_{\infty} t' \Big|_{t'=0}^{t'=t} \quad (3.50)$$

L'équation horaire du mouvement vertical (3.50) peut être mise sous la forme (Fig. 3.16),

$$z(t) = (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + v_{\infty} t \quad (3.51)$$

Pour des temps suffisamment grands par rapport au temps d'amortissement τ , c'est-à-dire

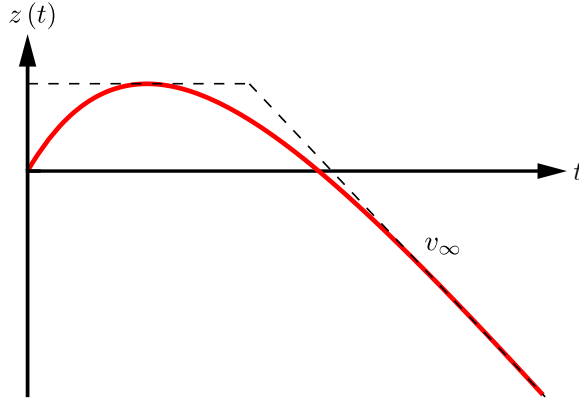


FIGURE 3.16 La coordonnée verticale de la position $z(t)$ augmente, atteint un maximum, puis diminue. Elle tend à diminuer linéairement lorsque la vitesse de chute est suffisamment proche de la vitesse limite.

$t \gg \tau$, l'exponentielle est négligeable. Ainsi, la coordonnée verticale de la position tend finalement vers l'asymptote oblique,

$$z(t) = v_{\infty} t + (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \quad \text{si} \quad t \gg \tau \quad (3.52)$$

3.3.6 Trajectoire balistique

En inversant l'équation horaire du mouvement horizontal (3.37), on tire le temps,

$$t(x) = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{x_{\infty}}\right) \quad (3.53)$$

En substituant le temps (3.53) dans l'équation horaire du mouvement vertical (3.51) et on obtient l'équation de la **trajectoire balistique** (Fig. 3.17) qui est indépendante du temps,

$$z(x) = (v_{0z} - v_{\infty}) \tau \frac{x}{x_{\infty}} - v_{\infty} \tau \ln\left(1 - \frac{x}{x_{\infty}}\right) \quad (3.54)$$

La force de frottement visqueux \mathbf{F}_f empêche l'objet d'aller au-delà de l'asymptote verticale,

$$x = x_{\infty} \quad (3.55)$$

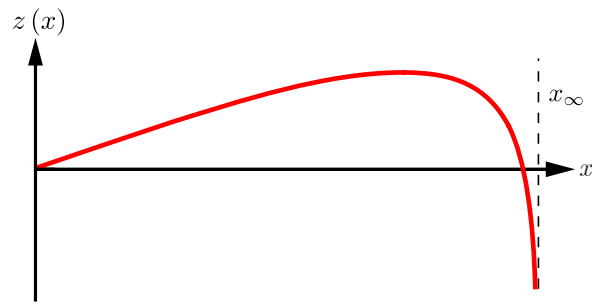


FIGURE 3.17 La trajectoire du mouvement balistique d'un point matériel en présence de frottement a une asymptote verticale en $x = x_\infty$.